# Einführung in die Semantik, 7. Sitzung
# Modelltheorie, $F_{deutsch}$

Götz Keydana

Göttingen
5. November 2009

## Modelltheorie

- Axiomatische Systeme
- Modelle

## Das Fragment $F_{deutsch}$

- Syntax
  - Phrasenstrukturgrammatik
- Semantik

# Natürliche Sprachen und Modelltheorie

Wir haben bei der Behandlung von Aussagen- und Prädikatenlogik bereits mit Modelltheorie gearbeitet.
Modelltheorie hat folgende für die Semantik natürlicher Sprachen wichtige Eigenschaften:

- Eine klare Trennung von Syntax und Semantik.
- Jedes Teilsystem ist formal und vollständig explizit.
- Die Beziehung zwischen Syntax und Semantik ist kompositional und eindeutig.
- Modelltheoretische Semantik ist daher falsifizierbar.

# Die syntaktische Seite

Die syntaktische Seite eines formalen Systems nennt man axiomatisches System.

Ein axiomatisches System ist ein Tripel $\langle A, S, P \rangle$.

- $A$ ist eine finite Menge von Symbolen, das Alphabet.
- $S$ ist eine Menge von strings über $A$, genannt die Axiome.
- $P$ ist eine Menge von n-ären Relationen in $A^*$, d.h. der Menge aller strings, die aus $A$ gebildet werden können, wobei $n \geq 2$ (d.h. die n-Tupel in $P$ müssen zumindest geordnete Paare sein). Die Elemente von $P$ werden Produktionen genannt.

# Theoreme

- Gegeben sei ein axiomatisches System $\langle A, S, P \rangle$: Eine linear geordnete Abfolge von strings $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ist eine Ableitung von $y_m$ gdw.
  - jeder string in der Abfolge entweder ein Axiom ist
  - oder einer der Produktionen in $P$ aus einem der in der Abfolge vorhergehenden strings folgt.
- Existiert eine Ableitung von $y$ in einem gegebenen axiomatischen System, so wird $y$ ein Theorem des Systems genannt.

# Beispiel für ein axiomatisches System

Axiomatisches System für Spiegelbild-strings über $\{a, b\}$:

- $A = \{a, b\}$
- $S = \{aa, bb\}$
- $P = \{\langle x, y\rangle \in A^* \times A^* | y = axa \vee y = bxb\}$
  $P =$
  $\{\langle e, aa\rangle, \langle e, bb\rangle, \langle a, aaa\rangle, \langle a, bab\rangle, \langle b, aba\rangle, \langle b, bbb\rangle, \langle aa, aaaa\rangle, \ldots\}$

# Beispiele für Ableitungen

- *bb*, *abba*, *aabbaa* ist eine Ableitung von *aabbaa*, weil
  - *aabbaa* der Produktion $\langle abba, aabbaa \rangle$ folgt,
  - *abba* der Produktion $\langle bb, abba \rangle$ folgt,
  - *bb* ein Axiom ist.
  - *aabbaa* ist daher ein Theorem.
- *ab*, *aaba*, *baabab* ist keine Ableitung, weil
  - *baabab* der Produktion $\langle aaba, baabab \rangle$ folgt,
  - *aaba* der Produktion $\langle ab, aaba \rangle$ folgt,
  - aber *ab* kein Axiom ist.

# Theorien und Modelle

Die Menge der Axiome zusammen mit der Menge aller daraus ableitbaren Theoreme ist eine Theorie.

Ein Modell für eine Theorie besteht aus einer Domäne $D$ und einer Interpretation $I$ aller primitiven Ausdrücke in $A$ in der Domäne dergestalt, daß alle Axiome der Theorie für dieses Modell wahr sind.

# Ein Beispiel: Die ersten vier Peano-Axiome

- das Alphabet: $\{0, N, S\}$
- die Axiome

(1) $N0$

(2) $(\forall x)(Nx \rightarrow (\exists y)(Ny \wedge Syx \wedge (\exists z)(Szx \rightarrow z = y)))$

(3) $\neg(\exists x)(Nx \wedge S0x)$

(4) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)((Nx \wedge Ny \wedge Szx \wedge Swy \wedge z = w) \rightarrow x = y)$

Eine Interpretation der Peano-Axiome

- 0 hat die Interpretation "natürliche Zahl Null"
- N hat die Interpretation "ist eine natürliche Zahl"
- S hat die Interpretation "ist Nachfolger von"

# Anforderungen

- modelltheoretische Semantik
- Kompositionalität
- Angemessenheit

# Anforderungen an die Syntax

- Rekursivität
- syntaktische Kategorien natürlicher Sprache
- Bezug auf Syntaxtheorie

# Phrasenstrukturgrammatik

Eine Phrasenstrukturgrammatik besteht aus:

- einer endlichen Menge von Kategorienamen (S = Satz, V = Verb, N = Nomen usw.)
- einer endlichen Menge von Grundausdrücken (Lexikon)
- Einer endlichen Menge von Phrasenstrukturregeln der Form
  $X \rightarrow Y_1 Y_2 \ldots Y_n$
  wobei $X$ ein Kategoriename und $Y_1 \ldots Y_n$ Kategorienamen oder Grundausdrücke
- einem ausgezeichneten Kategorienamen S

# Phrasenstrukturgrammatik *cont.*

## Phrasenstrukturgrammatiken sind top-down-Grammatiken

Die wohlgeformten Ausdrücke einer Phrasenstrukturgrammatik sind Folgen von Grundausdrücken, die aus dem Startsymbol S mithilfe der Phrasenstrukturregeln erzeugt werden können.

Phrasenstrukturgrammatiken können

- kontextfrei oder
- kontextsensitiv sein.

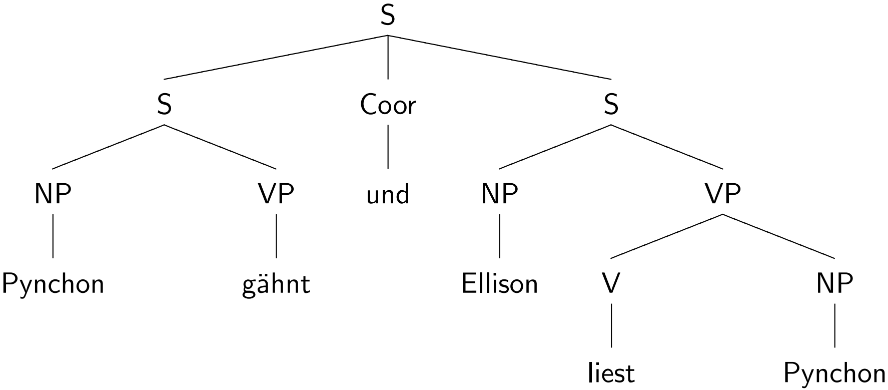
# $F_{deutsch}$: Das Vokabular

- Kategorienamen: {S, NP, VP, V, Coor, Mod}
- Grundausdrücke: {Pynchon, Ellison, schnarcht, gähnt, liest, kennt, und, oder, nicht}
- Phrasenstrukturregeln
  1. S $\rightarrow$ NP VP
  2. VP $\rightarrow$ V NP
  3. S $\rightarrow$ S Coor S
  4. S $\rightarrow$ S Mod
  5. NP $\rightarrow$ {Pynchon, Ellison}
  6. VP $\rightarrow$ {schnarcht, gähnt}
  7. V $\rightarrow$ {liest, kennt}
  8. Coor $\rightarrow$ {und, oder}
  9. Mod $\rightarrow$ {nicht}
- Startsymbol S

# Ableitung eines Satzes

(5) (a.) S
(b.) S Coor S
(c.) NP VP Coor S
(d.) NP VP Coor NP VP
(e.) NP VP Coor NP V NP
(f.) Pynchon VP Coor NP V NP
(g.) Pynchon gähnt Coor NP V NP
(h.) Pynchon gähnt Coor Ellison V NP
(i.) Pynchon gähnt Coor Ellison liest NP
(j.) Pynchon gähnt Coor Ellison liest Pynchon
(k.) Pynchon gähnt und Ellison liest Pynchon

# Phrasenstrukturbaum




[$_S$ [$_S$ [$_{NP}$ Pynchon] [$_{VP}$ gähnt]] [$_{Coor}$ und] [$_S$ [$_{NP}$ Ellison] [$_{VP}$ [$_V$ liest] [$_{NP}$ [Pynchon]]]]

# Grundlagen der Semantik

- Kompositionalität
- Zuweisung von Bedeutungen an elementare Ausdrücke
- Korrespondenz zwischen syntaktischen und semantischen Regeln
- modelltheoretische Semantik

# Diskursdomänen und mögliche Welten

- Wir setzen eine Diskursdomäne $D_e$ an:
  $D_e = \{\text{Pynchon, Ellison}\}$. (Weitere Domänen $D_x$ für Grundausdrücke jeder Kategorie $x$ werden im folgenden eingeführt.)
- Wir setzen eine Interpretationsfunktion $I$ an, die jede NP auf ein Individuum in $D_e$ (und jeden Grundausdruck $x$ auf eine Entität in $D_x$) abbildet.
- Diskursdomänen und Interpretationsfunktion $I$ bilden das Modell $M$, relativ zu dem Sätze bewertet werden.
- Weil Satzbedeutungen Mengen möglicher Welten sind, setzen wir die Menge $W$ aller möglichen Welten an.

# Satzbedeutungen

Satzbedeutungen sind von der Art
$[\![ [_S\ [_{NP}\ \text{Pynchon}]\ [_{VP}\ \text{gähnt}]] ]\!]^M$
$= \lambda w \in W[\text{Pynchon gähnt in } w]$,
also Funktionen von möglichen Welten in Wahrheitswerte.

Für Satzbedeutungen setzen wir die Domäne $D_p$ an:
$D_p = [W \rightarrow \{0, 1\}]$

# Die Bedeutung von NPs

Die Bedeutung der NPs:

- $[\![\text{Pynchon}]\!]^M =$ **Pynchon**
- $[\![\text{Ellison}]\!]^M =$ **Ellison**

(Referenten schreiben wir in Abgrenzung von Grundausdrücken in Fettdruck oder mit einem $'$: **Pynchon** bzw. Pynchon$'$.)

# Die Bedeutung intransitiver Verben (VPs)

- ergibt sich zwingend aus dem Kompositionalitätsprinzip:
  - Der semantische Typ einer NP ist ein Individuum in $D_e$.
  - Der semantische Typ eines S ist eine Funktion von möglichen Welten in Wahrheitswerte.
  - Also muß der semantische Typ eines intransitiven Verbs eine Funktion von Individuen in Funktionen von möglichen Welten in Wahrheitswerte sein.
- $[\![\text{gähnt}]\!]^M = \lambda x \in D_e \lambda w \in W[x\ \textbf{gähnt}\ \text{in}\ w]$
- $[\![\text{schnarcht}]\!]^M = \lambda x \in D_e \lambda w \in W[x\ \textbf{schnarcht}\ \text{in}\ w]$
- Für die Referenten von VPs setzen wir eine Domäne $D_{VP}$ an.

# Bedeutungsregeln für Phrasenstrukturregeln

- Bedeutung für Strukturen, die nur aus einem Kategoriesymbol und einem lexikalischen Tochterknoten bestehen:
  Wenn $\alpha$ ein Wort und X ein Kategoriesymbol ist, dann
  $[\![ [_X \alpha] ]\!]^M = [\![ \alpha ]\!]^M$
- Bedeutung für S $\rightarrow$ NP VP:
  $[\![ [_S [_{NP} \alpha][_{VP} \beta]] ]\!]^M = [\![ [_{VP} \beta] ]\!]^M ([\![ [_{NP} \alpha] ]\!]^M)$

# Ein Beispiel

(6) $[\![ [_S\ [_{NP}\ \text{Pynchon}]\ [_{VP}\ \text{gähnt}]] ]\!]^M$

(a.) $[\![ [_{VP}\text{gähnt}] ]\!]^M([\![ [_{NP}\text{Pynchon}] ]\!]^M)$

(b.) $[\![ \text{gähnt} ]\!]^M([\![ \text{Pynchon} ]\!]^M)$

(c.) $\lambda x \in D_e \lambda w \in W[x\ \textbf{gähnt}\ \text{in}\ w](\textbf{Pynchon})$

(d.) $\lambda w \in W[\textbf{Pynchon gähnt}\ \text{in}\ w]$

# Die Bedeutung transitiver Verben

- ergibt sich wiederum aus dem Kompositionalitätsprinzip:
  - Der semantische Typ einer NP ist ein Individuum in $D_e$.
  - Der semantische Typ eines S ist eine Funktion von möglichen Welten in Wahrheitswerte.
  - Der semantische Typ einer VP ist eine Funktion von Individuen in Funktionen von möglichen Welten in Wahrheitswerte.
  - Also muß der semantische Typ eines V eine Funktion von Individuen in Funktionen von Individuen in Funktionen von möglichen Welten in Wahrheitswerte sein.
- $[\![\text{liest}]\!]^M = \lambda y \in D_e \lambda x \in D_e \lambda w \in W[x\ \textbf{liest}\ y \text{ in } w]$
- $[\![\text{kennt}]\!]^M = \lambda y \in D_e \lambda x \in D_e \lambda w \in W[x\ \textbf{kennt}\ y \text{ in } w]$
- Für die Referenten transitiver Verben setzen wir eine Domäne $D_V$ an.

# Bedeutungsregel für VP $\longrightarrow$ V NP

- $[\![[_{\mathrm{VP}}[_{\mathrm{V}}\alpha][_{\mathrm{NP}}\beta]]]\!]^{M} = [\![[_{\mathrm{V}}\alpha]]\!]^{M}([\![[_{\mathrm{NP}}\beta]]\!]^{M})$

# Ein Beispiel

(7) $[\![ [_S\ [_{NP}\ \text{Pynchon}]\ [_{VP}\ [_V\ \text{liest}]\ [_{NP}\ \text{Ellison}]]] ]\!]^M$

(a.) $[\![ [_{VP}[_V\text{liest}][_{NP}\textit{Ellison}]] ]\!]^M([\![ [_{NP}\text{Pynchon}] ]\!]^M)$

(b.) $[\![ [_V\text{liest}] ]\!]^M([\![ [_{NP}\text{Ellison}] ]\!]^M)([\![ [_{NP}\text{Pynchon}] ]\!]^M)$

(c.) $[\![\text{liest}]\!]^M([\![\text{Ellison}]\!]^M)([\![\text{Pynchon}]\!]^M)$

(d.) $\lambda y \in D_e \lambda x \in D_e \lambda w \in W[x\ \textbf{liest}\ y \text{ in } w](\textbf{Pynchon})(\textbf{Ellison})$

(e.) $\lambda x \in D_e \lambda w \in W[x\ \textbf{liest Ellison} \text{ in } w](\textbf{Pynchon})$

(f.) $\lambda w \in W[\textbf{Pynchon liest Ellison} \text{ in } w]$