Einführung in die Semantik, 6. Sitzung
Prädikatenlogik

Götz Keydana

Göttingen
17. November 2006

Lastenheft

Was Prädikatenlogik leisten muß:

- Kompositionalität atomarer Aussagen
  - Terme (Individuenausdrücken, Variablen)
  - Prädikate beliebiger Arität
- Quantifizierung

Das Vokabular

- Die Menge der Individuen-Konstanten $CON = \{j, m, \ldots\}$
- Die Menge der Individuen-Variablen $VAR = \{x, y, z, \ldots\}$
  Individuen-Konstanten und -Variablen sind Terme
- Die Menge der Prädikate $PRED = \{P^n, Q^n, R^n, \ldots\}$ mit n-ärer Valenz
- Die Konnektive der Aussagenlogik $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Die Quantorensymbole $\forall, \exists$
- Klammern: $(,), [,]$

Die Syntax

- Wenn P ein n-äres Prädikat ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, dann ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine (atomare) Formel.
- Wenn ϕ eine Formel ist, ist $\neg\phi$ eine Formel.
- Wenn ϕ und ψ Formeln sind, ist $\phi \wedge \psi$ eine Formel.
- Wenn ϕ und ψ Formeln sind, ist $\phi \vee \psi$ eine Formel.
- Wenn ϕ und ψ Formeln sind, ist $\phi \rightarrow \psi$ eine Formel.
- Wenn ϕ und ψ Formeln sind, ist $\phi \leftrightarrow \psi$ eine Formel.
- Wenn ϕ eine Formel ist und v eine Variable, ist $(\forall v)\phi$ eine Formel.
- Wenn ϕ eine Formel ist und v eine Variable, ist $(\exists v)\phi$ eine Formel.

Beispiele

- für wffs
  - $M(s)$
  - $L(j, m)$
  - $(\forall x)L(j, x)$
  - $(\exists x)[Q(x) \wedge (\forall y)(P(y) \rightarrow (\exists z)S(x, y, z))]$
  - $L(x, m)$

Terminologie

- Formeln, die keine oder nur gebundene (dazu unten) Variablen enthalten, nennt man Aussagen / Propositionen.
- Die Verbindung eines Prädikats mit einer oder mehreren Variablen nennt man eine ungesättigte Proposition (open statement) bzw. eine propositionale Funktion.
- $\exists$ ist der Existenzquantor. $(\exists x)S(x)$ liest man: Es gibt mindestens ein x, für das gilt: x hat die Eigenschaft S.
- $\forall$ ist der Allquantor. $(\forall x)S(x)$ liest man: Für alle x gilt: x hat die Eigenschaft S.

Skopus

Verbindet man eine ungesättigte Formel ϕ mit einem Quantor zu $(\exists x)\phi$ oder $(\forall x)\phi$, so ist ϕ der Skopus des Quantors. Jeder Ausdruck in ϕ liegt im Skopus des Quantors.

Bindung

Das Vorkommen einer Variable x ist gebunden, wenn es im Skopus von $(\exists x)$ oder $(\forall x)$ liegt. Eine Variable ist frei, wenn sie nicht gebunden ist.

n.b.: Die Syntax erlaubt Quantifizierung auch dann, wenn im Skopus des Quantors keine Variable steht. Man spricht dann von leerer Quantifizierung (vacuous quantification).

Grundlagen

- Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.
- Der Wahrheitswert einer Aussage wird von den semantischen Werten ihrer Teile bestimmt.

Beispiel

- $S(p)$:
- p ist eine Individuenkonstante und hat als semantischen Wert ein Individuum aus der Menge D der Individuen, z.B. Pynchon.
- S ist ein einstelliges Prädikat, z.B. die Menge aller Schriftsteller in D.
- $[\![S(p)]\!] = 1$, wenn das Individuum, das mit p korrespondiert, Element der Menge S ist.

Ein weiteres Beispiel

- Der semantische Wert eines zweistelligen Prädikats ist entsprechend eine Menge geordneter Paare von Individuen aus D, also eine Teilmenge von $D \times D$.
  - p hat den semantischen Wert Pynchon.
  - r ist eine Individuenkonstante und hat als semantischen Wert das Individuum Rainbow's Gravity aus der Menge D der Individuen.
  - A ist ein zweistelliges Prädikat, z.B. die Menge der Paare von Autoren und Büchern.
  - $[\![A(p,r)]\!] = 1$ gwd. $\langle [\![p]\!], [\![r]\!] \rangle \in [\![A]\!]$

Das Modell

Der Wahrheitswert einer prädikatenlogischen Aussage hängt ab von (1.) der Diskursdomäne und (2.) der Wahl der semantischen Werte für die Konstanten und Prädikate.
Sind diese spezifiziert, so haben wir ein Modell für die Prädikatenlogik. Der Wahrheitswert einer prädikatenlogischen Aussage wird also immer relativ zu einem Modell M ermittelt. Wir schreiben: $[\![\phi]\!]^M = 1$ bzw. 0.

Das Modell *cont.*

- Ein Modell besteht aus einer Menge von Individuen D
- einer Interpretationsfunktion I von der Menge der Konstanten CON auf D, die
  - jede Individuenkonstante auf ein Element aus D abbildet (Individuenkonstanten sind daher rigide Designatoren),
  - einstellige Prädikate auf eine Teilmenge von D abbildet,
  - zweistellige Prädikate auf eine Teilmenge von $D \times D$ abbildet,
  - n-stellige Prädikate auf eine Teilmenge von $D \times {}^nD$ abbildet.

Probleme mit Quantoren

Betrachten wir die Proposition $(\exists x)S(x)$, wobei $S =$ 'ist Schriftsteller', $D = \{\text{Pynchon, Ellison, Thompson, Caliban}\}$:

- Die Interpretationsfunktion I bildet das Prädikat S auf eine Menge von Individuen in D ab.
- Wenn Variablen zum Definitionsbereich von I gehören würden, würde I nunmehr x auf ein Element aus D abbilden, z.B. Caliban.
- Wir haben somit den Wahrheitswert der Proposition für Caliban. Da Caliban nicht in S ist, wird die Proposition auf 0 abgebildet. Das ist aber offensichtlich falsch: Zu D gehört z.B. auch Pynchon, die Proposition ist also wahr.
- Konsequenz: Variablen muß ihr Wert über eine andere Funktion zugewiesen werden.

Die Zuweisungsfunktion g

Wir führen daher eine Zuweisungsfunktion g von der Menge der Variablen VAR auf D ein.

g bildet rekursiv jede Variable der Sprache auf alle Individuen in D ab.

Noch einmal $(\exists x)S(x)$

- I bildet wiederum S auf eine Menge von Individuen in D ab: $I(S) = \{\text{Pynchon, Ellison, Thompson}\}$
- g weist nun allen Variablen der Sprache einen Wert aus D zu, x z.B. den Wert Caliban.
- $[\![(\exists x)S(x)]\!]^{M,g^{x/Caliban}} = 0$, weil Caliban $\notin F(S)$.
- rekursive Applikation von g: Wir applizieren eine Funktion g', die sich von g nur dadurch unterscheidet, daß sie x ein anderes Individuum aus D zuweist, z.B. Pynchon.
- $[\![(\exists x)S(x)]\!]^{M,g'^{x/Pynchon}} = 1$, weil Pynchon $\in F(S)$.
  Folge: $[\![(\exists x)S(x)]\!]^{M,g} = 1$

Die Form von Universalaussagen

Wir wollen den natürlichsprachlichen Satz 'Alle Schriftsteller sind Menschen' in eine prädikatenlogische Aussage übersetzen:

- Schriftsteller ist ein einstelliges Prädikat, S
- Mensch ist ein einstelliges Prädikat, M
- $(\forall x)(S(x) \rightarrow M(x))$

Die Form von Existenzaussagen

Wir wollen den natürlichsprachlichen Satz 'Einige Schriftsteller sind Menschen' in eine prädikatenlogische Aussage übersetzen:

- Schriftsteller ist ein einstelliges Prädikat, S
- Mensch ist ein einstelliges Prädikat, M
- $(\exists x)(S(x) \wedge M(x))$
- Warum geht $(\exists x)(S(x) \rightarrow M(x))$ nicht?

Die Semantik

- Wenn α eine nicht-logische Konstante ist, dann gilt: $[\![\alpha]\!]^{M,g} = F(\alpha)$
- Wenn α eine Variable ist, dann gilt: $[\![\alpha]\!]^{M,g} = g(\alpha)$
- Wenn P ein n-äres Prädikat ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, dann gilt: $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!] = 1$ gdw. $\langle [\![t_1]\!]^{M,g}, \ldots [\![t_n]\!]^{M,g} \rangle \in [\![P]\!]^{M,g}$

Die Semantik *cont.*

- Wenn ϕ und ψ Propositionen sind, dann gilt:
  - $[\![\neg\phi]\!]^{M,g} = 1$ gdw. $[\![\phi]\!]^{M,g} = 0$
  - $[\![\phi \wedge \psi]\!]^{M,g} = 1$ gdw. $[\![\phi]\!]^{M,g} = 1$ und $[\![\psi]\!]^{M,g} = 1$
  - $[\![\phi \vee \psi]\!]^{M,g} = 1$ gdw. $[\![\phi]\!]^{M,g} = 1$ oder $[\![\psi]\!]^{M,g} = 1$
  - $[\![\phi \rightarrow \psi]\!]^{M,g} = 1$ gdw. $[\![\phi]\!]^{M,g} = 0$ oder $[\![\psi]\!]^{M,g} = 1$
  - $[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!]^{M,g} = 1$ gdw. $[\![\phi]\!]^{M,g} = [\![\psi]\!]^{M,g}$

Die Semantik *cont.*

- Wenn ϕ eine Formel ist und v eine Variable, dann gilt: $[\![\forall v\phi]\!]^{M,g} = 1$ gdw. für alle $d \in D$, $[\![\phi]\!]^{M,g^{v/d}} = 1$
- Wenn ϕ eine Formel ist und v eine Variable, dann gilt: $[\![\exists v\phi]\!]^{M,g} = 1$ gdw. für wenigstens ein $d \in D$, $[\![\phi]\!]^{M,g^{v/d}} = 1$

Die wichtigsten Quantorengesetze

dazu empfehlenswert Partee *et al.* (1990:148-154)!

(1) Negation
$\neg(\forall x)\phi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg\phi(x)$

(2) Distribution

(a.) $(\forall x)(\phi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\phi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$

(b.) $(\exists x)(\phi(x) \vee \psi(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\phi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$

(c.) $(\forall x)\phi(x) \vee (\forall x)\psi(x)) \Rightarrow (\forall x)(\phi(x) \vee \psi(x))$

(d.) $(\exists x)(\phi(x) \wedge \psi(x)) \Rightarrow (\exists x)\phi(x) \wedge (\exists x)\psi(x)$

Die wichtigsten Quantorengesetze *cont.*

(3) (In)Dependenz

(a.) $(\forall x)(\forall y)\phi(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\phi(x,y)$

(b.) $(\exists x)(\exists y)\phi(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\phi(x,y)$

(c.) $(\exists x)(\forall y)\phi(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\phi(x,y)$

Die wichtigsten Quantorengesetze *cont.*

(4) Bewegung

(a.) $(\phi \rightarrow (\forall x)\psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\phi \rightarrow \psi(x))$
vorausgesetzt, daß x in ϕ nicht frei ist.

(b.) $(\phi \rightarrow (\exists x)\psi(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\phi \rightarrow \psi(x))$
vorausgesetzt, daß x in ϕ nicht frei ist.

(c.) $(\forall x)\phi(x) \rightarrow \psi \Leftrightarrow (\exists x)(\phi(x) \rightarrow \psi)$
vorausgesetzt, daß x in ψ nicht frei ist.

(d.) $(\exists x)\phi(x) \rightarrow \psi \Leftrightarrow (\forall x)(\phi(x) \rightarrow \psi)$
vorausgesetzt, daß x in ψ nicht frei ist.

Die Pränex-Normalform

Die Pränex-Normalform einer Formel ist eine alphabetische Variante, in der alle Quantoren einer quantorenfreien Matrix vorausgehen.

Die Gesetze der Quantorenbewegung sind die Grundlage für die Bildung von PNF.

Beispiel

(5) $(\exists x)F(x) \rightarrow (\forall y)G(y)$

(a.) $= (\forall y)[(\exists x)F(x) \rightarrow G(y)]$ (Gesetz 4a.)

(b.) $= (\forall y)[(\forall x)(F(x) \rightarrow G(y))]$ (Gesetz 4d.)

(c.) $= (\forall y)(\forall x)(F(x) \rightarrow G(y))$

Partee, Barbara H., Alice ter Meulen, & Robert E. Wall.
1990.
Mathematical Methods in Linguistics.
Dordrecht: Kluwer.