Einführung in die Semantik,4. Sitzung Mehr zu Funktionen / Mengen, Relationen, Funktionen und sprachliche Bedeutungen

Götz Keydana

Göttingen
1. November 2006

Mengen und sprachliche Bedeutungen

Relationen und sprachliche Bedeutungen

Lambda-Abstraktion
- Abstraktion und Konversion
- Rekursion

charakteristische Funktionen
- Charakteristische Funktionen und Lambda-Terme
- Mengenlehre revisited

Funktionen und sprachliche Bedeutungen
- Funktionen und Wortbedeutung
- Funktionen und Satzbedeutung

Mengen und Wortbedeutung

Die Bedeutung eines Nomens α ist die Menge der Objekte, auf die sich α anwenden läßt.

Schriftsteller zu sein ist eine Eigenschaft, die bestimmten Personen zukommt: Pynchon ist ein Schriftsteller, Ellison ebenso, Caliban nicht etc. Die Bedeutung von *Schriftsteller* kann also theoretisch dadurch angegeben werden, daß man sämtliche Schriftsteller aufzählt.

Wir können die Bedeutung von *Schriftsteller* daher mengentheoretisch angeben:

(1) $[\![\text{Schriftsteller}]\!] = \{x | x \text{ ist ein Schriftsteller}\}$

Adjektive, intransitive Verben

Auch die Bedeutung von Adjektiven und intransitiven Verben kann als Menge angegeben werden.

Adjektive und intransitive Verben bezeichnen ebenfalls Eigenschaften.

Die Bedeutung von *unsichtbar* ist daher mengentheoretisch

(2) $[\![\text{unsichtbar}]\!] = \{x | x \text{ ist unsichtbar}\}$,

die Bedeutung von *schläft*

(3) $[\![\text{schläft}]\!] = \{x | x \text{ schläft}\}$.

Hyponymie

Hyponymie ist eine Teilmengenbeziehung.

α ist ein Hyponym von β gdw. $[\![\alpha]\!] \subseteq [\![\beta]\!]$

Beispiel:

(4) $[\![\text{Schiftsteller}]\!] \subseteq [\![\text{Mensch}]\!]$

Mengen und Satzbedeutung

Wir haben oben gesagt, die Bedeutung eines Satzes Φ sei eine Funktion von möglichen Welten in Wahrheitswerte.

Mengentheoretisch heißt das: Die Bedeutung eines Satzes Φ ist die Menge der möglichen Welten, in denen Φ war ist.

(5) $[\![\Phi]\!] = \{w | \Phi \text{ ist in } w \text{ wahr}\}$

Beispiel:

(6) $[\![\text{Pynchon schnarcht}]\!] = \{w | \text{ Pynchon schnarcht in } w\}$

Eine Menge möglicher Welten wird *Proposition* genannt.

Implikation

Logische Folgerungen können wie Hyponymien mengentheoretisch dargestellt werden.

(7) $\Phi \rightarrow \Psi$ gdw. $[\![\Phi]\!] \subseteq [\![\Psi]\!]$

Beispiel für eine Implikation

(8) *Pynchon ist Schriftsteller.* $\rightarrow$ *Pynchon ist ein Mensch.*

a. $[\![$Pynchon ist Schriftsteller$]\!] =$
$\{w|$ Pynchon ist Schriftsteller in $w\}$

b. $[\![$Pynchon ist ein Mensch$]\!] =$
$\{w|$ Pynchon ist ein Mensch in $w\}$

c. $\{w|$ Pynchon ist Schriftsteller in $w\} \subseteq$
$\{w|$ Pynchon ist ein Mensch in $w\}$

Wortbedeutung und Relationen

Wir haben oben gesehen, daß wir Nomina, intransitive Verben und Adjektive als Mengen darstelen können. Entsprechend können wir die Bedeutung transitiver Verben als Mengen von Paaren darstellen.

- Ein Beispiel für ein transitives Verb ist *lesen*:

  (9) $[\![\text{lesen}]\!] = \{\langle x, y\rangle | x \text{ liest } y\}$

- Auch die Bedeutung einiger Nomina kann als Menge von Paaren dargestellt werden:

  (10) $[\![\text{Autor (von)}]\!] = \{\langle x, y\rangle | x \text{ ist Autor von } y\}$

- Die Bedeutung dreistelliger Verben ist folgerichtig eine Menge von Tripeln:

  (11) $[\![\text{geben}]\!] = \{\langle x, y, z\rangle | x \text{ gibt } y \text{ an } z\}$

Notation von Funktionen

Funktionen können folgendermaßen notiert werden:

(12) $[\![\text{Autor (von)}]\!] = \begin{bmatrix} \text{Pynchon} \rightarrow \text{Mason \& Dixon} \\ \text{Ellison} \rightarrow \text{Invisible Man} \\ \text{Thompson} \rightarrow \text{Fear and Loathing} \end{bmatrix}$

Exhaustiv können Funktionen in diesem Format in der Regel nicht notiert werden. Eine Alternative ist die Beschreibung:

(13) $[\![\text{Autor (von)}]\!] \quad a : \text{Personen} \rightarrow \text{Bücher}$
$\qquad x \mapsto \text{der Autor von } x$

Die Funktion a sei definiert als Funktion von Personen in Bücher, wobei a jedes x auf den Autor von x abbildet:
$a(\text{Invisible Man}) = \text{Ellison}$

Notation von Funktionen *cont.*

(14) $[\![\text{Nachfolger}]\!] \quad \begin{array}{l} s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto x+1 \end{array}$

Die Funktion s sei definiert als Funktion von natürlichen Zahlen in natürliche Zahlen, wobei s jedes x auf den Nachfolger von x abbildet:
$s(27) = 28$

Aus der Algebra geläufig ist folgende Notation:

(15) $f(x) = x + 1$

Die vorgestellten Notationen sind wie Eigennamen.

Was wir brauchen, sind aber kompositional analysierbare Namen für Funktionen: Lambda-Terme.

Lambda-Abstraktion

Die Bildung eines Lambda-Terms aus einer beliebigen Formel heißt *Lambda-Abstraktion.*

- Ausgangspunkt ist eine Beschreibung, die den Wert der intendierten Funktion für eine Variable x angibt.
- Um den Namen der Funktion anzugeben, die auf x appliziert wird und als Wert den der Beschreibung ausgibt, abstrahieren wir über x und bilden das Lambda-Abstrakt, einen kompositional interpretierbaren Namen.

Ein Beispiel

(16) (a.) $x + 1$ (Beschreibung)
(b.) $\lambda x[x + 1]$ (Lambda-Abstrakt)

(16b.) ist kompositional interpretierbar. Der Term denotiert eine Funktion, die jedem x den Wert $x + 1$ zuweist.

Notation und Terminologie

Lambda-Terme haben folgende Struktur:

(17) λ Variable [Beschreibung des Werts der Variable]

Der Lambda-Operator λ *bindet* eine Variable, die aus dem *Rumpf* des Lambda-Terms abstrahiert wird.

Ein weiteres Beispiel:

(18) λx[Autor von x]

Skopus

In einem Lambda-Term $\lambda v[\ldots]$ ist "[...]" der *Skopus* von λv.

Eine Variable v im Rumpf eines Lambda-Terms wird immer von dem nächsthöheren Lambdaoperator mit derselben Variable v gebunden.

Beispiel

(19) $\lambda x \underbrace{[3x + \lambda y \overbrace{[y^2 + y + 1]}]}$

Lambda-Konversion

Funktionen werden auf Argumente appliziert. Der Wert eines auf ein Argument applizierten Lambda-Terms kann angegeben werden, indem die Variable, über die abstrahiert worden ist, durch das Argument ersetzt wird.

Dieses Verfahren heißt *Lambda-Konversion*.

Beispiel:

(19) (a.) $\lambda x[x+1]$ (Lambda-Term)
(b.) $\lambda x[x+1](27)$ (funktionale Applikation)
(c.) $= 27+1$ (Konversion)
(d.) $= 28$

Definitionsbereich

Zur Angabe des Definitionsbereichs D bei Lambda-Termen gibt es 2 Möglichkeiten:

(20) $\lambda v \in D$[Beschreibung des Werts von v]

(21) $\lambda v\langle$Bedingung für $v\rangle$[Beschreibung des Werts von v]

Beispiel:

(22) $\lambda x \in \mathbb{N}[x + 1]$

(23) $\lambda x\langle x \in \mathbb{N}\rangle[x + 1]$

Mengen als Argumente

Argumente von Funktionen können auch Mengen (X) oder Funktionen (f) sein.

Beispiel

(24) $\lambda X[X \cap \{1,2,3\}]$

Anwendung

(25) $\lambda X[X \cap \{1,2,3\}](\{2,3,4\}) = \{2,3\}$

(26) $\lambda X[X \cap \{1,2,3\}](\{4,5,6\}) = \emptyset$

(27) $\lambda X[X \cap \{1,2,3\}](\text{Pynchon}) = \text{nicht definiert}$

Funktionen als Argumente

Beispiel

(28) $\lambda f[f(3)]$

Anwendung

(29) $\lambda f[f(3)](\lambda x[x^2]) = \lambda x[x^2](3) = 9$

Beispiel

(30) $\lambda f[f(3) + f(4)]$

Anwendung

(31) $\lambda f[f(3) + f(4)](\lambda x[x^2]) = \lambda x[x^2](3) + \lambda x[x^2](4) = 25$

Funktionen, die Funktionen als Argumente nehmen, sind Funktionen höherer Ordnung.

Funktionen als Werte

Funktionen können Funktionen als Werte ausgeben.

Beispiel

(32) $\lambda x \lambda y[x^2 + y]$

Die Funktion nimmt einen Wert x und liefert eine Funktion, die den Wert y nimmt und $x^2 + y$ ausgibt.
Anwendung

(33) $\lambda x \lambda y[x^2 + y](3)(4) = \lambda y[9 + y](4) = 9 + 4 = 13$

wahrheitswertige Funktionen

Eine Funktion, die jedes Objekt x auf den Wert 1 abbildet, wenn es zu einer Menge A gehört, und den Wert 0 ausgibt, wenn x nicht zu A gehört, ist die charakteristische Funktion der Menge A, χ_A.

(34) Sei U ein Universum und A eine Menge mit $A \subseteq U$, dann gilt folgende Definition für χ_A:

$U \rightarrow \{0, 1\}$,

$x \mapsto 1$, wenn $x \in A$,

$x \mapsto 0$, wenn $x \notin A$

Beispiele

(35) Sei $U = \mathbb{N}, A = \{1, 2\}$. Dann gilt:

$$\chi_A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 0\rangle\langle 4, 0\rangle, \ldots\}$$

(36) Sei $U =$ der Menge der Personen, $A = \{x|x \text{ ist ein Schriftsteller}\}$. Dann gilt:

$$\chi_{\{x|x \text{ ist ein Schriftsteller}\}} = \{\langle \text{Pynchon}, 1\rangle, \langle \text{Ellison}, 1\rangle, \langle \text{Caliban}, 0\rangle, \ldots\}$$

Lambda-Terme

Charakteristische Funktionen können als Lambda-Terme dargestellt werden.

Beispiel

(37) $\{x | x \text{ ist ein Schriftsteller}\}$ ist die Menge aller Schriftsteller. Die charakteristische Funktion dieser Menge ist $\lambda x[x \text{ ist ein Schriftsteller}]$.

(a.) Für Pynchon $\in \{x | x \text{ ist ein Schriftsteller}\}$ schreiben wir $\lambda x[x \text{ ist ein Schriftsteller}](\text{Pynchon}) = 1$.

(b.) Für Caliban $\notin \{x | x \text{ ist ein Schriftsteller}\}$ schreiben wir $\lambda x[x \text{ ist ein Schriftsteller}](\text{Caliban}) = 0$

Der Vorteil der Funktionsnotation

- In der Mengennotation $\{x| \ldots x \ldots\}$ gibt es genau zwei Möglichkeiten für jedes Objekt e: $e \in \{x| \ldots x \ldots\}$ oder $e \notin \{x| \ldots x \ldots\}$.
- In der Funktionsnotation $\lambda x \in D[\ldots x \ldots]$ gibt es drei Möglichkeiten:
  $e \in D$, dann $\lambda x[\ldots x \ldots](e) = 1$ oder $\lambda x[\ldots x \ldots](e) = 0$
  $e \notin D$

Mengentheoretische Beziehungen und charakteristische Funktionen

(38) Seien c und d charakteristische Funktionen. Dann:

(a.) $c \subseteq d$ ist definiert, wenn $DOM(c) \subseteq DOM(d)$.
Wenn definiert, ist $c \subseteq d = 1$, wenn
$\{x|c(x)\} \subseteq \{x|d(x)\}$, sonst $= 0$.

(b.) $c \subset d$ ist definiert, wenn $DOM(c) \subseteq DOM(d)$.
Wenn definiert, ist $c \subset d = 1$, wenn
$\{x|c(x)\} \subset \{x|d(x)\}$, sonst $= 0$.

Mengentheoretische Operationen und charakteristische Funktionen

(38) *cont.*

(c.) $c \cap d = \lambda x \langle x \in DOM(c) \cap DOM(d) \rangle [x \in \{x|c(x)\} \cap \{x|d(x)\}]$

(d.) $c \cup d = \lambda x \langle x \in DOM(c) \cap DOM(d) \rangle [x \in \{x|c(x)\} \cup \{x|d(x)\}]$

(e.) $c \backslash d = \lambda x \langle x \in DOM(c) \cap DOM(d) \rangle [x \in \{x|c(x)\} \backslash \{x|d(x)\}]$

(f.) $c' = \lambda x \langle x \in DOM(c) \rangle [x \notin \{x|c(x)\}]$

Relationen und Funktionen

Die Bedeutung transitiver Verben wie *lesen* kann als Relation dargestellt werden. *Lesen* ist aber keine Funktion, da es nicht rechtseindeutig ist.
Aber: Wir können Mengen als charakteristische Funktionen darstellen. Relationen sind Mengen von Paaren. Daher:

(39) $[\![\text{liest}]\!] =$

(a.) Relation: $\{\langle x, y\rangle | x \text{ liest } y\}$

(b.) Funktion:
$$\lambda\langle x, y\rangle \in \{\langle x, y\rangle | x \in \text{ Person}, y \in \text{ Text}\}[x \text{ liest } y]$$

Schönfinkelisierung

Die elegantere Alternative: Wir reduzieren mehrstellige auf einstellige Funktionen. Das Verfahren heißt *Schönfinkelisierung*.
Beispiel

(40) $[\![\text{liest}]\!] = \lambda x \in \text{Person}[\lambda y \in \text{Text}[x \text{ liest } y]]$

$\lambda x \in \text{Person}[\lambda y \in \text{Text}[x \text{ liest } y]](\textit{InvisibleMan})(\textit{Pynchon})$

$= \lambda x \in \text{Person}[x \text{ liest Invisible Man}]](\textit{Pynchon})$

$=$ Pynchon liest Invisible Man

$=$ 1 in w, wenn Pynchon in w Invisible Man liest.

Satzbedeutung und Funktionen

Die Bedeutung eines Satzes Φ ist die Menge der möglichen Welten, in denen Φ wahr ist.
Die charakteristische Funktion dieser Menge und somit die Bedeutung von Φ ist

(41) die Funktion $[\![\Phi]\!]$ von der Menge aller möglichen Welten W in die Menge der Wahrheitswerte $\{0, 1\}$, sodaß für jedes $w \in W$ gilt: $[\![\Phi]\!](w) = 1$ gdw. Φ in w wahr ist, sonst 0.

In Lambda-Notation:

(42) $[\![\Phi]\!] = \lambda w \in W[\Phi = 1 \,\text{in}\, w]$