Einführung in die Semantik, 5. Sitzung
Aussagenlogik

Götz Keydana

Göttingen
9. November 2006

Warum die formalen Sprachen der Logik?

- formale Sprachen haben – wie jede Sprache – ein Vokabular, eine Syntax und eine Semantik.
- Die Relation zwischen Syntax und Semantik ist eindeutig.
- Logik ist die Lehre vom Schlußfolgern. Ein Argument ist valide, wenn die Konklusion eine notwendige Folge aus den Prämissen ist. Das ist dann der Fall, wenn (1) die Regeln des Schlußfolgerns beachtet werden, und (2) die Prämissen wahr sind:
  - (1) (a.) Alle Menschen sind sterblich.
    (b.) Sokrates ist ein Mensch.
    (c.) Also ist Sokrates sterblich.

Das Vokabular

- Elementaraussagen (atomic statements): Einfache, nichtkomplexe Aussagesätze:

  (2) Pynchon ist ein Schriftsteller.

  (3) Thompson liest Mason & Dixon.

- Elementaraussagen werden durch die Symbole $p, q, r, s, \ldots$ bezeichnet.
- $\phi, \psi, \ldots$ sind Metavariablen über Aussagen.

Vokabular *cont.*

Neben Elementaraussagen gehören zum Vokabular

- die Konnektive: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Klammern: (,)

Die Syntax

1. Jede Elementaraussage ist eine wohlgeformte Formel (wff).
2. Wenn ϕ eine wff ist, dann ist $\neg\phi$ eine wff.
3. Wenn ϕ und ψ wff sind, dann sind $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ wff.
4. Nichts anderes ist eine wff.

Beispiele

für wff:

(4) (a.) $(p \vee \neg q)$

(b.) $\neg(p \wedge \neg q)$

(c.) $((((p \wedge q) \vee \neg r) \rightarrow s) \leftrightarrow t)$

für nicht-wohlgeformte Formeln:

(5) (a.) $\vee q$

(b.) $\neg \wedge pq)$

(c.) $p \wedge q \rightarrow r$

Wahrheitswerte

Wenn ϕ eine wff ist, dann gilt:

- $[\![\phi]\!] = 1$ oder
- $[\![\phi]\!] = 0$ in Abhängigkeit von dem korrespondierenden Modell M
- Die Zuweisung der Wahrheitswerte erfogt über eine Bewertungsfunktion V: $V(\phi) = [\![\phi]\!]$. Weil V eine Funktion ist, hat jede Elementaraussage genau einen Wahrheitswert in einem Modell M.

n.b.: Unsere Logik ist zweiwertig. Jede Aussage ist also entweder wahr oder falsch.

Die Bedeutung nicht-elementarer Aussagen

Die Bedeutung nicht-elementarer Aussagen kann kompositional aus der Bedeutung der elementaren Aussagen und der Art ihrer Verbindung abgeleitet werden.

Die Bedeutung nicht-elementarer Aussagen kann mithilfe von Wahrheitstafeln ermittelt werden.

Negation

Für jede wff ϕ gilt:

ϕ	$\neg\phi$
1	0
0	1

Beispiel:

(6) (a.) p: Pynchon ist ein Schriftsteller.

(b.) $\neg p$: Es ist nicht der Fall, daß Pynchon ein Schriftsteller ist.

Konjunktion

Für alle wff ϕ und ψ gilt:

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Beispiel:

(7) (a.) *p*: Pynchon ist ein Schriftsteller.

(b.) *q*: Ellison ist ein Schriftsteller.

(c.) $p \wedge q$: Pynchon ist ein Schriftsteller, und Ellison ist ein Schriftsteller.

Disjunktion

Für alle wff ϕ und ψ gilt:

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Beispiel:

(8) (a.) p: Pynchon ist ein Schriftsteller.
(b.) q: Ellison ist ein Schriftsteller.
(c.) $p \vee q$: Pynchon ist ein Schriftsteller, oder Ellison ist ein Schriftsteller.

$\vee$ und natürlichsprachliches *oder*

oder hat zwei Lesarten:

- die exklusive Lesart:

  (9) Alle Gerichte werden mit Reis oder Kartoffeln serviert.

- (selten) die inklusive Lesart:

  (10) Alle, die mit kleinen Kindern reisen oder gebrechlich sind, bekommen einen Sitzplatz.

Die exklusive Lesart von *oder* wird als *Implikatur* erklärt:

In der inklusiven Lesart ist die Disjunktion schwächer als die Konjunktion. Aufgrund der Grice'schen Quantitätsmaxime ('Sag soviel, wie du kannst'), präferieren Sprecher die Konjunktion, wenn sie wissen, daß beide Sachverhalte wahr sind.

Konditional / materiale Implikation

Für alle wff ϕ und ψ gilt:

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Beispiel:

(11) (a.) *p*: Pynchon ist pleite.

(b.) *q*: Pynchon schreibt ein neues Buch.

(c.) $p \rightarrow q$: Wenn Pynchon pleite ist, schreibt er ein neues Buch. (hinreichende Bedingung)

Konditional und falscher Antezedens

- Konditionale sind einfach zu evaluieren, wenn der Antezedens wahr ist: Ist der Konsequens/Sukzedens falsch, so ist der Konditional falsch; ist der Konsequens wahr, so ist der Konditional wahr.
- Warum sind aber Konditionale mit falschem Antezedens immer wahr?
  - In einer zweiwertigen Logik muß jede Aussage, die nicht falsifiziert ist, wahr sein.
  - Die Definition ist hinreichend für die Analyse der Validität von Argumenten in der Mathematik.

Bikonditional

Für alle wff ϕ und ψ gilt:

ϕ	ψ	$\phi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Beispiel:

(12) (a.) *p*: Pynchon ist pleite.

(b.) *q*: Pynchon schreibt ein neues Buch.

(c.) $p \leftrightarrow q$: (Nur) wenn Pynchon pleite ist, schreibt er ein neues Buch. (notwendige Bedingung)

Die Semantik

1. In Abhängigkeit von dem Modell M gibt es eine Bewertungsfunktion V, so daß für jede Elementaraussage ϕ $V(\phi) = 1$ oder $V(\phi) = 0$
2. $V(\neg\phi) = 1$ gdw. $V(\phi) = 0$
3. $V(\phi \wedge \psi) = 1$ gdw. $V(\phi) = 1$ und $V(\psi) = 1$
4. $V(\phi \vee \psi) = 1$ gdw. $V(\phi) = 1$ oder $V(\psi) = 1$
5. $V(\phi \rightarrow \psi) = 1$ gdw. $V(\phi) = 0$ oder $V(\psi) = 1$
6. $V(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$ gdw. $V(\phi) = V(\psi)$

3 Arten von Aussagen

In der Aussagenlogik werden Aussagen aufgrund ihrer Wahrheitstafeln klassifiziert. Man unterscheidet

- Tautologien
- Kontradiktionen
- neutrale Ausdrücke (contingencies)

Tautologie

Eine Aussage ist eine Tautologie, wenn die letzte Spalte der Wahrheitstafel nur 1en enthält.

Beispiel: $(p \vee \neg p)$

p	$\neg p$	$(p \vee \neg p)$
1	0	1
0	1	1

Kontradiktion

Eine Aussage ist eine Kontradiktion, wenn die letzte Spalte der Wahrheitstafel nur 0en enthält.

Beispiel: $(p \wedge \neg p)$

p	$\neg p$	$(p \wedge \neg p)$
1	0	0
0	1	0

Äquivalenz

Ist ein Bikonditional eine Tautologie, so sind die beiden Konstituenten der Aussage *logisch äquivalent*.

Logische Äquivalenz zwischen zwei Aussagen ϕ und ψ notiert man $\phi \Leftrightarrow \psi$

Beispiel: Wahrheitstafel für $(\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$

p	q	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \wedge \neg q)$	$(\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Logische Folge

Ist ein Konditional eine Tautologie, dann ist der Konsequens eine logische Folge des Antezedens. Der Antezedens impliziert den Konsequens.

Logische Folge zwischen zwei Aussagen ϕ und ψ notiert man $\phi \Rightarrow \psi$

Beispiel: Wahrheitstafel für $(((p \to q) \wedge p) \Rightarrow q)$

p	q	$(p \to q)$	$((p \to q) \wedge p)$	$(((p \to q) \wedge p) \to q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Logische Folge *cont.*

- Ist der Antezedens eines tautologischen Konditionals wahr, so ist es auch der Konsequens (Zeile 1 der Wahrheitstafel).
- Ist der Antezedens falsch, so ist der Wahrheitswert des Konsequens nicht vorhersagbar (Zeilen 3,4 der Wahrheitstafel).

Die wichtigsten aussagenlogische Gesetze

(13) Idempotenz

(a) $(\phi \vee \phi) \Leftrightarrow \phi$

(b) $(\phi \wedge \phi) \Leftrightarrow \phi$

(14) Kommutativität

(a) $(\phi \vee \psi) \Leftrightarrow (\psi \vee \phi)$

(b) $(\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \phi)$

(15) Assoziativität

(a) $((\phi \vee \psi) \vee \chi) \Leftrightarrow (\phi \vee (\psi \vee \chi))$

(b) $((\phi \wedge \psi) \wedge \chi) \Leftrightarrow (\phi \wedge (\psi \wedge \chi))$

Die wichtigsten aussagenlogische Gesetze *cont.*

(16) Distributivität

(a) $(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \Leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))$

(b) $(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \Leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))$

(17) Komplementarität

(a) $\neg\neg\phi \Leftrightarrow \phi$

(18) de Morgan

(a) $\neg(\phi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)$

(b) $\neg(\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi)$

Die wichtigsten aussagenlogische Gesetze *cont.*

(19) Konditionalgesetze

(a) $(\phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)$

(b) $(\phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$

(c) $(\phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \neg(\phi \wedge \neg\psi)$

(20) Bikonditionalgesetze

(a) $(\phi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$

(b) $(\phi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\neg\phi \wedge \neg\psi) \vee (\phi \wedge \psi)$

Schlußfolgern und Implikation

Ein Argument

- besteht aus den Prämissen
- und der Konklusion / dem Schluß,
- ist valide, wenn die Prämissen die Konklusion implizieren, d.h. wenn es keine Wahrheitswertezuweisung an die Elementaraussagen gibt, die alle Prämissen wahr macht, die Konklusion aber falsch.
- Ist dies der Fall, so ist das Argument nicht valide.

ϕ impliziert (entails) ψ für jede Bewertung V, wenn gilt: Wenn $V(\phi) = 1$, dann $V(\psi) = 1$.

Inferenzregeln

Modus Ponens

$$\frac{\begin{array}{l}\phi \quad \rightarrow \quad \psi \\ \phi\end{array}}{\psi}$$

Beispiel

Wenn Pynchon Invisible Man liest, ist Ellison glücklich.
Pynchon liest Invisible Man.

Ellison ist glücklich.

Inferenzregeln *cont.*

Modus Tollens

$$\begin{array}{l} \phi \quad \rightarrow \quad \psi \\ \neg\psi \\ \hline \neg\phi \end{array}$$

Beispiel

Wenn Pynchon Invisible Man liest, ist Ellison glücklich.
Ellison ist nicht glücklich.

Pynchon liest nicht Invisible Man.

Inferenzregeln *cont.*

Hypothetischer Syllogismus

$$\begin{array}{ccc} \phi & \rightarrow & \psi \\ \psi & \rightarrow & \chi \\ \hline \phi & \rightarrow & \chi \end{array}$$

Beispiel

Wenn Pynchon Ellison liest, liest Pynchon Invisible Man.
Wenn Pynchon IM liest, liest Pynchon einen amerik. Schriftsteller.

Wenn Pynchon Ellison liest, liest Pynchon einen amerik. Schriftsteller.

Inferenzregeln *cont.*

Disjunktiver Syllogismus

$$\begin{array}{l} \phi \quad \vee \quad \psi \\ \neg\phi \\ \hline \psi \end{array}$$

Beispiel

$$\begin{array}{l} \text{Pynchon liest Invisible Man, oder Pynchon liest Fear and Loathing.} \\ \text{Pynchon liest nicht Invisible Man.} \\ \hline \text{Pynchon liest Fear and Loathing.} \end{array}$$

Beth-Tableaus und Beweis durch Falsifizierung

Beispiel: Beweis von $\neg\neg p$ aus $(p \wedge q)$

Wahr	*Falsch*	
$(p \wedge q)$	$\neg\neg p$	Prämisse(n) unter Wahr, Konklusion unter Falsch
p		aufgrund der Wahrheitstafel für $\wedge$
q		aufgrund der Wahrheitstafel für $\wedge$
$\neg p$		weil $\neg\neg p$ falsch ist
	p	weil $\neg p$ wahr ist
		Widerspruch, also muß $\neg\neg p$ wahr sein