Einführung in die Semantik, 2./3. Sitzung
Mengen / Relationen / Funktionen

Götz Keydana

Göttingen
2. November 2006

Das Konzept Menge

Eine Menge ist eine abstrakte Zusammenfassung wohlunterschiedener (diskreter) Objekte.

Die Objekte, die zu einer Menge gehören, sind die *Elemente* der Menge.

- *abstrakt*: Die Zusammenfassung muß nirgendwo realiter vorliegen.
- *Zusammenfassung*: Ob ein Objekt Element einer gegebenen Menge ist, muß angebbar sein. Die Elemente einer Menge sind ungeordnet (Mengen sind keine Tupel/Listen).
- *diskret*: Die Objekte müssen unterscheidbar sein. Kein Objekt kommt in einer Menge mehr als einmal vor (Mengen sind keine Systeme/bags).

Weiteres zum Begriff Menge

- Größe von Mengen:
  - Mengen können endlich sein.
  - Mengen können unendlich sein.
  - Es gibt Einermengen. (Achtung: Die Einermenge ist nicht dasselbe wie ihr Element!)
  - Es gibt die leere Menge.
- Die Elemente einer Menge können von jeder beliebigen Art sein. (Achtung: Mengen können Elemente von Mengen sein!)
- Mengen können völlig arbiträr sein.

Notation von Mengen

- Mengen werden mit Großbuchstaben A,B,C,X,Y etc. bezeichnet.
- Elemente von Mengen werden mit Kleinbuchstaben a,b,c,x,y etc. bezeichnet.
- $a \in A$ “a ist ein Element von A”.
- $a \notin A$ “a ist kein Element von A”.

Spezifizierung von Mengen: Aufzählung

Die einfachste Art, eine Menge zu spezifizieren, besteht in der Aufzählung der Elemente oder Listennotation:

(1) {Pynchon, Ellison, Thompson}

(2) {Pynchon, {Ellison, Thompson}}

(3) $\{4, 6, 8, \ldots\}$

Spezifizierung von Mengen: Abstraktion

(Fast) ohne Probleme auch bei der Spezifizierung unendlicher Mengen ist die Abstraktion oder Prädikatsnotation:

(4) $\{x | x$ ist ein amerikanischer Schrifsteller$\}$

(5) $\{x | x$ ist eine gerade Zahl größer als 3$\}$

(6) $\{x | x$ ist durch 2 teilbar und grösser oder gleich 4$\}$

Spezifizierung von Mengen: Rekursive Regeln

Rekursive Regeln spezifizieren Mengen rekursiv auf einer finiten Basis:

(7) (a) $4 \in E$
(b) Wenn $x \in E$, dann $x + 2 \in E$.
(c) Nichts anderes gehört zu E.

Identität und Mächtigkeit

Identität

Zwei Mengen sind identisch gdw. sie exakt dieselben Elemente haben. $=$ bezeichnet mengentheoretische Identität.

(8) $\{4, 6, 8, \ldots\} = \{x | x \text{ist eine gerade Zahl größer als } 3\}$

Mächtigkeit / Kardinalität

Die Mächtigkeit von Mengen ist die Anzahl ihrer Elemente. $|A|$ oder $\#(A)$ oder $\mathrm{card}(A)$ bezeichnet die Mächtigkeit einer Menge A.

(9) $|\{\text{Pynchon, Ellison, Thompson}\}| = 3$

(10) $|\{4, 6, 8, \ldots\}| = \aleph_0$

Teilmengen

Wenn alle Elemente einer Menge A auch Elemente von B sind, so ist A eine Teilmenge von B, B die Obermenge von A.

(11) $A \subseteq B$ gdw. für alle x: Wenn $x \in A$, dann $x \in B$.

n.b.: Nach dieser Definition ist jede Menge eine Teilmenge ihrer selbst. Ausgeschlossen ist dieser Fall in der *echten* Teilmengenbeziehung:

(12) $A \subset B$ gdw. $A \subseteq B$ und $B \not\subseteq A$.

Eigenschaften von Teilmengen

- Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge.
- Einermengen sind von Elementen zu unterscheiden:

(13) Wenn $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ist, dann gilt:
$\{4\} \subseteq \mathbb{N}$, aber nicht $4 \subseteq \mathbb{N}$, ebenso
$4 \in \mathbb{N}$, aber nicht $\{4\} \in \mathbb{N}$.

Potenzmengen

Die Menge aller Teilmengen von A ist die Potenzmenge von A.

(14) $\wp(A) =_{def} \{X | X \subseteq A\}$

Beispiele:

(15) $\wp(\{a\}) = \{\{a\}, \emptyset\}$

(16) $\wp(\{a, b\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$

Mächtigkeit von Potenzmengen

(17) Wenn $|A| = n$, dann $|\wp(A)| = 2^n$

Vereinigung

Die Vereinigung zweier Mengen A und B ist die Menge, die alle Elemente enthält, die in A und B vorkommen, und nur diese.

(18) $A \cup B =_{def} \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$

Beispiele

(19) $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(20) $\{1, 2, 3\} \cup \emptyset = \{1, 2, 3\}$

Durchschnitt

Der Durchschnitt zweier Mengen A und B ist die Menge, die alle Elemente enthält, die sowohl in A als auch in B vorkommen, und nur diese.

(21) $A \cap B =_{def} \{x | x \in A \,\text{und}\, x \in B\}$

Beispiele

(22) $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$

(23) $\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$

Differenz

Die Differenz zweier Mengen A und B ist die Menge, die genau die Elemente enthält, die in A vorkommen, nicht aber in B, und nur diese.

(24) $A \backslash B =_{def} \{x | x \in A \,\text{und}\, x \notin B\}$

Beispiele

(25) $\{1, 2, 3\} \backslash \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$

(26) $\{1, 2, 3\} \backslash \emptyset = \{1, 2, 3\}$

Komplement

Das Komplement einer Menge A relativ zu einem Universum U ist die Menge, die genau die Elemente enthält, die in U vorkommen, nicht aber in A, und nur diese.

(27) $A' =_{def} U \backslash A$

Beispiel

(28) Wenn $U = \mathbb{N}$:
$\{1, 2, 3\}' = \{x | x \text{ eine natürliche Zahl und } x \geq 4\}$

Fundamentale mengentheoretische Gleichungen

dazu unbedingt lesenswert Partee *et al.* (1990:17-23)!

(29) Idempotenz
  (a) $X \cup X = X$
  (b) $X \cap X = X$

(30) Kommutativität
  (a) $X \cup Y = Y \cup X$
  (b) $X \cap Y = Y \cap X$

(31) Assoziativität
  (a) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
  (b) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

Fundamentale mengentheoretische Gleichungen *cont.*

(32) Distributivität

(a) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

(b) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

(33) Identität

(a) $X \cup \emptyset = X$

(b) $X \cup U = U$

(c) $X \cap \emptyset = \emptyset$

(d) $X \cap U = X$

Fundamentale mengentheoretische Gleichungen *cont.*

(34) Komplementarität

(a) $X \cup X' = U$

(b) $(X')' = X$

(c) $X \cap X' = \emptyset$

(d) $X \setminus Y = X \cap Y'$

(35) de Morgan

(a) $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$

(b) $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$

(36) Konsistenz

(a) $X \subseteq Y$ gdw. $X \cup Y = Y$

(b) $X \subseteq Y$ gdw. $X \cap Y = X$

Anwendung: Beweis von $A \cap B \subseteq A \cup B$

(37) (a) $X \subseteq Y$gdw.$X \cap Y = X$, gesetzt $X := (A \cap B)$ und $Y := (A \cup B)$, dann ist zu zeigen:
$(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$

(b) Beweis
$(A \cap B) \cap (A \cup B)$
$((A \cap B) \cap A) \cup ((A \cap B) \cap B)$ Distributivität
$(A \cap (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \cap B)$ Kommutativität
$((A \cap A) \cap B) \cup (A \cap (B \cap B))$ Assoziativität (2mal)
$(A \cap B) \cup (A \cap B)$ Idempotenz (2mal)
$A \cap B$ Idempotenz
q.e.d.

Tupel

Geordnete Paare können über Mengen definiert werden:

(38) $\langle a, b\rangle =_{def} \{\{a\}, \{a, b\}\}$, weil $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{b\}, \{a, b\}\}$ (d.h. $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$) nur dann, wenn $a = b$.

Tripel werden auf geordnete Paare rückgeführt:

(39) $\langle a, b, c\rangle =_{def} \langle\langle a, b\rangle, c\rangle$

Generell gilt: n-Tupel werden auf $(n-1)$-Tupel rückgeführt.

Kartesische Produkte

Die Gesamtheit aller Paare, die sich aus zwei gegebenen Mengen A und B bilden lassen, indem das erste Element aus A und das zweite aus B genommen wird, ist das Kartesische Produkt.

(40) $A \times B =_{def} \{\langle x, y\rangle | x \in A, y \in B\}$

Beispiele

(41) Wenn $K = \{a, b\}$ und $L = \{1, 2\}$, dann
 (a) $K \times L = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$
 (b) $L \times K = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle\}$

Relationen

Relationen sind Paarungen von Objekten.

- Die Relation “Mutter” besteht zwischen einer Mutter und ihren Kindern.
- Transitive Verben bezeichnen i.d.R. Relationen: “lesen” ist die Relation zwischen zwei Objekten dergestalt, daß das erste Objekt das zweite liest.
- Die Teilmenge ist eine Relation zwischen Mengen.
- etc.

Relationen *cont.*

- Rab bzw. aRb ist die Relation R zwischen a und b.
- $R \subseteq A \times B$ ist die Relation R zwischen Objekten aus den Mengen A und B.
  - $R \subseteq A \times B$ ist eine Relation von A auf B.
  - Eine Relation zwischen Objekten aus einer Menge A ist eine Relation in A.
  - Die Projektion von R auf die erste Koordinate ist der Definitionsbereich (engl. domain), die Projektion von R auf die zweite Koordinate der Wertebereich (engl. range) von R.
- R von A auf B ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$.
- Wir haben damit die Relation R mengentheoretisch reduziert auf eine Menge geordneter Paare $\{\langle a, b\rangle | aRb\}$.

Funktionen und Relationen

Funktionen sind rechtseindeutige Relationen.

(42) Eine Relation R von A auf B ist eine Funktion gdw.

(a) jedes Element des Definitionsbereichs ($DOM(R)$) mit genau einem Element im Wertebereich ($RNG(R)$) gepaart ist,

(b) $DOM(R) = A$.

Eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$ ist also genau dann eine Funktion, wenn jedes Element von A genau einmal als erste Koordinate in den geordneten Paaren der Menge auftaucht.

(43) $DOM(F) =_{def} \{x | \text{es gibt } y \text{ so, daß } \langle x, y \rangle \in F\}$

(44) $RNG(F) =_{def} \{y | \text{es gibt } x \text{ so, daß } \langle x, y \rangle \in F\}$

Beispiel für Funktionen

(45) Wenn $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$, dann sind die folgenden Relationen von A auf B Funktionen:

(a) $P = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$

(b) $Q = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c, 1\rangle\}$

(c) $R = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 2\rangle\}$

Terminologie

- $F : A \rightarrow B$ bezeichnet die Funktion F von A auf B, $F : A \rightarrow A$ die Funktion F in A.
- Elemente in $DOM(F)$ sind Argumente von F, Elemente in $RNG(F)$ sind Werte von F. Hat eine Funktion wie P in (43a) den Wert 1 bei Argument a, so schreibt man $P(a) = 1$. Man sagt, P wird auf a angewendet; P bildet a auf 1 ab.
- A sei $DOM(F)$, B sei $RNG(F)$. Wenn $A \subset C$, dann gilt, daß F eine *partielle* Funktion von C auf B ist.
- F ist ein-eindeutig, wenn jedes Argument in $DOM(F)$ auf genau einen Wert in $RNG(F)$ abgebildet wird und jeder Wert in $RNG(F)$ der Wert genau eines Arguments in $DOM(F)$ ist.

Reflexivität

Gegeben sei eine Menge A und eine Relation R in A: R ist reflexiv gdw. alle geordneten Paare $\langle x, x\rangle$ für jedes $x \in A$ in R sind.

Beispiele

(46) Die Relation $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$ in der Menge $A = \{1, 2, 3\}$.

(47) Die Relation "hat denselben Geburtstag wie" in der Menge der Menschen.

Enthält eine Relation R *kein* geordnetes Paar $\langle x, x\rangle$, so ist R irreflexiv. (Beispiel: "ist größer als")

Symmetrie

Gegeben sei eine Menge A und eine Relation R in A: R ist symmetrisch gdw. für jedes geordnete Paar $\langle x, y \rangle$ das Paar $\langle y, x \rangle$ ebenfalls in R ist.

Beispiele

(48) Die Relationen $R_1 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}, R_2 = \{\langle 2, 2 \rangle\}$ in der Menge $A = \{1, 2, 3\}$.

(49) Die Relation "ist Vetter/Base von" in der Menge der Menschen.

Symmetrie *cont.*

- Enthält eine Relation R *kein* geordnetes Paar $\langle x, y \rangle$ dergestalt, daß das Paar $\langle y, x \rangle$ ebenfalls in R ist, so ist R asymmetrisch. (Beispiel: "ist älter als")
- Eine Relation R ist antisymmetrisch, wenn immer, wenn $\langle x, y \rangle$ und $\langle y, x \rangle$ in R sind, $x = y$.

Transitivität

Gegeben sei eine Menge A und eine Relation R in A: R ist transitiv gdw. für alle geordneten Paare $\langle x, y\rangle$ und $\langle y, z\rangle$ das Paar $\langle x, z\rangle$ ebenfalls in R ist.

Beispiele

(50) Die Relationen $R_1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle\}, R_2 = \{\langle 2, 2\rangle\}$ in der Menge $A = \{1, 2, 3\}$.

(51) Die Relation "ist Vorfahre" in der Menge der Menschen.

Enthält eine Relation R *keine* geordneten Paare $\langle x, y\rangle$ und $\langle y, z\rangle$ dergestalt, daß das Paar $\langle x, z\rangle$ ebenfalls in R ist, so ist R intransitiv. (Beispiel: "ist Mutter von")

Konnektivität

Gegeben sei eine Menge A und eine Relation R in A: R ist konnex gdw. für alle distinkten Elemente x und y in A $\langle x, y\rangle \in R$ oder $\langle y, x\rangle \in R$ (oder beide).

Beispiele

(52) Die Relationen $R_1 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle\}, R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ in der Menge $A = \{1,2,3\}$.

(53) Die Relation "ist größer als" in $\mathbb{N}$.

Äquivalenzrelationen

Äquivalenzralationen sind

- reflexiv
- symmetrisch
- transitiv

Beispiele:

- Gleichheit
- "ist gleichaltrig mit" etc.

Jede Äquivalenzrelation R in A erlaubt es, A in disjunkte Teilmengen zu partitionieren, die sogenannten Äquivalenzklassen.

$[\![x]\!]$ sei die Menge aller y, für die gilt: $\langle x, y \rangle \in R$, R sei eine Äquivalenzrelation. Dann ist $[\![x]\!]$ die Äquivalenzklasse für x.

Abfolgerelationen

Abfolgerelationen sind

- immer transitiv
- zudem entweder: irreflexiv und asymmetrisch: strenge Abfolge
  $A = \{a, b, c\}, R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$
- oder: reflexiv und antisymmetrisch: schwache Abfolge
  $A = \{a, b, c\}, R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$

Beispiel:

- strenge Abfolge: $>$ in $\mathbb{N}$.
- schwache Abfolge: $\geq$ in $\mathbb{N}$.

PARTEE, BARBARA H., ALICE TER MEULEN, & ROBERT E. WALL.
1990.
Mathematical Methods in Linguistics.
Dordrecht: Kluwer.